

A. VSTUPNÍ ČÁST	
1. Název:	Funkce II – exponenciální, logaritmické a goniometrické funkce
2. Kód:	
2a) Kategorie/obor vzdělání:	78-42-M/08 Lyceum
3. Typ vyučovací jednotky:	vzdělávací modul
4. Délka výuky – doporučený počet vyučovacích hodin:	24 hodin
5. Platnost:	1. září 2025 Zpracovatelský tým: Josef Bobek a kol.
6. Vstupní předpoklady:	– základní vzdělání (matematika) – modul navazuje na OVU RVP ZV: - MJA-MAT-001-ZV9-001: Řeší problémy se zlomky v kontextu reálných situací. - MJA-MAT-001-ZV9-002: Využívá k řešení problémů desetinná čísla, procenta, mocniny a odmocniny v kontextu reálných situací. - MJA-MAT-001-ZV9-003: Využívá k řešení problémů záporná čísla. - MJA-MAT-002-ZV9-004: Využívá k odhadu, měření a porovnávání nestandardní a standardní jednotky délky, obsahu a objemu. - MJA-MAT-002-ZV9-005: Využívá metrické vlastnosti útvarů k řešení problému v kontextu reálných situací. - MJA-MAT-002-ZV9-006: Řeší problémy s časovými údaji v kontextu reálných situací. - MJA-MAT-003-ZV9-007: Rozpozná geometrické útvary a využívá jejich vlastnosti k řešení problémů. - MJA-MAT-004-ZV9-010: Interpretuje a vytváří různě graficky prezentovaná data. - MJA-MAT-004-ZV9-011: Vypočítá a interpretuje základní charakteristiky souboru dat. - MJA-MAT-004-ZV9-013: Vyhledá všechny prvky nebo skupiny prvků, které splňují dané podmínky. - MJA-MAT-005-ZV9-014: Rozpozná, vyjádří, doplní a tvoří pravidelnosti a číselné řady. - MJA-MAT-005-ZV9-015: Řeší reálné problémy pomocí poměru, úměry a procent. - MJA-MAT-005-ZV9-016: Modeluje reálné problémy pomocí výrazů, upravuje je a vyhodnocuje. - MJA-MAT-005-ZV9-017: Řeší reálné problémy pomocí rovnic a nerovnic. – Modul navazuje na OVU modulu: - Množiny, intervaly a výroková logika - Čísla - Výrazy - Rovnice a nerovnice - Elementární funkce Doporučené umístění v učebním plánu: 1. ročník, blokova/kontinuální výuka

B. JÁDRO VYUČOVACÍ JEDNOTKY

1. Charakteristika:

Modul Exponenciální, logaritmické a goniometrické je vrcholem elementární abstraktní i aplikované matematiky na současné střední škole. Umožňuje řešit problémy z praxe. Umožňuje zaznamenávat, popisovat souvislosti mezi daty a pomocí dalších matematických nástrojů je užívat k získávání dalších dat a závislostí, predikci a k řešení problémů v ostatních partiích matematiky, přírodních věd, techniky a technologií. Bez těchto funkcí je dnes další studium technických oborů nemyslitelné. Navíc Exponenciální a logaritmické funkce jsou základem finanční gramotnosti. Goniometrické funkce jsou základem trigonometrie a všech oblastí praxe s ní souvisejících.

Vzdělávací modul shrnuje, prohlubuje a rozšiřuje téměř všechny výsledky učení ze základní školy a navazuje na modul Elementární funkce.

Modul se v souvislostech úzce prolíná s modulem rovnice a nerovnice. Je svými aplikacemi potřebný pro některé následující moduly.

2. Očekávané výsledky učení a jejich indikátory:

Užívá vlastností a vazeb mezi různými způsoby zadání funkcí

- Užívá funkci jako závislost jedné veličiny na druhé.
- Užívá pojmy: předpis funkce, závisle proměnná veličina, nezávisle proměnná veličina, číselné hodnoty veličiny, definiční obor funkce, obor hodnot funkce, graf funkce, funkce rostoucí, funkce klesající, funkce konstantní.
- Na základě zadání určí vlastnosti (definiční obor a obor hodnot funkce, monotónnost, sudost a lichost) funkce (exponenciální, logaritmické a goniometrické).
- Sestaví tabulku dle funkčního předpisu a načrtne graf funkce.
- U zadaného předpisu nebo grafu funkce určí, zda se jedná o exponenciální funkci, logaritmickou funkci, goniometrickou funkci nebo jinou funkci.
- Na základě zadání (exponenciální funkce, logaritmická funkce, goniometrická funkce) přiřadí předpis funkce ke grafu funkce a naopak. Využije výraz s proměnnými při modelování situací.

Využívá informací z grafů funkcí.

- Z grafu funkce určí požadované hodnoty veličin.
- Z grafu nebo předpisu funkce určí souřadnice průsečíků grafu funkce s osami souřadnic.
- Sestaví předpis a načrtne graf lineární funkce na základě tabulky, ze zadání souřadnic bodů z grafu funkce.

Užívá exponenciální, logaritmické a goniometrické funkce.

- Vysvětlí a používá logaritmus při výpočtech, zejména z oboru vzdělání.
- Řeší jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice v $\mathbb{R}$ (typu $f(ax+b) = c$, kde a, b, c jsou reálná čísla?).
- Určí hodnotu goniometrické funkce pro daný obecný orientovaný úhel.
- Používá vlastnosti a vzájemné vztahy goniometrických funkcí k řešení rovnic a v obecném trojúhelníku.
- Řeší jednoduché goniometrické rovnice v $\mathbb{R}$.

Užívá funkce komplexně v praxi a oboru vzdělání.

- Používá digitální technologie, informační zdroje a známé funkční vztahy k popisu a výpočtům finančních záležitostí (jednoduché úrokování, spoření, důchodové spoření, splátky).
- Používá digitální technologie, informační zdroje a známé funkční vztahy k popisu a výpočtům pravidelného růstu a poklesu (změn populace, změn v ekonomice, změn v přírodních jevech a technice, změn v hospodářských jevech).
- Používá vlastnosti a vzájemné vztahy goniometrických funkcí k řešení metrických úloh v rovině a prostoru.

3. Podpora rozvoje klíčových kompetencí a základních gramotností:**Základní gramotnosti:**

- čtenářská a pisatelská
- matematicko-logická

Klíčové kompetence:

- k učení
- komunikační
- k řešení problémů
- digitální

4. Obsah vzdělávání:**Funkce:**

- exponenciální, logaritmické a goniometrické funkce,
- Zpracování dat v tabulce, grafu – měření závislosti dvou veličin či data z myšlenkového experimentu
- výpočet hodnoty funkce
- užití digitálních technologií k určení předpisu funkcí.

Vztahy mezi funkcemi a způsoby jejího zadání:

- předpis funkcí, určení hodnot, grafu a vlastností
- definiční obor a obor hodnot funkce
- vazby a souvislosti mezi funkcemi – posuny a deformace grafů
- užití digitálních technologií k zobrazení grafů funkcí
- definice a užití logaritmu (i dekadický a přirozený)
- jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice v $\mathbb{R}$ (typu $f(ax+b) = c$, kde a, b, c jsou reálná čísla?)
- hodnota goniometrické funkce pro daný obecný orientovaný úhel.
- vlastnosti a vzájemné vztahy goniometrických funkcí
- vztahy v obecném trojúhelníku
- jednoduché goniometrické rovnice v $\mathbb{R}$.

Aplikace:

- výpočty finančních záležitostí (jednoduché úrokování, spoření, důchodové spoření, splátky) za pomoci digitálních technologií, informačních zdrojů a známých funkčních vztahů
- výpočtům pravidelného růstu a poklesu veličin – aplikace v praxi (počty nakažených, hladina intenzity zvuku) , změny v přírodních jevech a technice (radioaktivní rozpad, absorpce materiálů, útlum), změn v hospodářských jevech (změny populace, změny v ekonomice)
- užití vlastností a vzájemných vztahů goniometrických funkcí k řešení metrických úloh v rovině a prostoru (určení rozměrů útvarů) a v aplikačních úlohách (rovnoběžník sil, vztahy fyzikálních veličin, popis kmitání a vlnění, střídavý harmonický signál)

5. Vzdělávací strategie:

Vzdělávací modul má mimo jiné charakter skupinových projektů s těmito možnými tématy:

1. Tvorba příkladů z praxe a hledání jejich řešení – žáci se zaměří na reálné situace z denního života i oboru vzdělávání,
2. Průzkum historických kontextů, ve kterých byly funkce využívány k řešení problémů,
3. Řešení praktických problémů z oblasti STE, techniky, technologií a financí

Žáci:

- řeší úlohy motivační s aplikacemi i úlohy na procvičení a upevnění dovedností
- pomocí vrstevnického učení, didaktického působení učitele, zkoumáním zákonitostí, objevováním, indukci a dedukcí porozumí problematice a matematické podstatě funkcí a jejich souvislostem s praxí
- užívají funkce při řešení aplikačních problémů
- propojují modul s oblastí STE, technikou a technologiemi
- užívají digitální technologie při složitějších výpočtech při řešení úloh z praxe
- užívají funkce při řešení projektů
- řeší projekty:
 - seznámí se s pravidly realizace projektu a jeho hodnocení
 - společně s učitelem vyberou problematiku k řešení, vymezí si problém a naplánují postup řešení projektu;
 - shromáždí dostupné informace týkající se dané problematiky – sbírají, zpracují a vyhodnotí pomocí digitálních technologií dostupná data
 - navrhnou možná řešení a projekt zpracují
 - prezentují a obhájí výsledky své práce ústní nebo písemnou formou
 - diskutují výsledky ostatních, dávají připomínky a náměty, hodnotí je.

Propojení modulu s oblastí STE:

- řešení příkladů z praxe

C. VÝSTUPNÍ ČÁST			
1. Způsob ověřování dosažených výsledků	max. počet bodů	2. Kritéria hodnocení	váha
Průběžné – dialog učitele se žákem – písemné testové úlohy – práce s pracovními listy – pozorování činností žáka	100	aktivní a odpovědný přístup zvládnutí rutinních činností bez systémových chyb porozumění dané problematice v širším kontextu; – bezchybně a s výjimečnými chybami způsobenými nepozorností 100 % – opakované chyby z nepozornosti a výjimečné z neznalosti 75 % – občasné chyby z neznalosti a nízká kvalita provedení 50 % – opakované správné užití a vyjadřování. zodpovědný přístup k plnění úkolů a vzdělávání. 25 % – neznalost či výjimečné správné vysvětlení – nesplněno 0 %	40 %
Sumativní – samostatná/skupinová tvůrčí práce/projekt;	100	kompetence k řešení problému: relevance návrhu řešení – věcná správnost, funkčnost; aktivní přístup a podíl na realizaci projektu; kvalita prezentace	50 %
Reflexe – zpětnovazebný rozhovor s učitelem (a ostatními žáky) o výsledcích	100	reflexe zkušenosti: aktivní účast na reflexi, jasnost a správnost argumentace	10 %

Závěrečné hodnocení modulu je váženým průměrem hodnocení z jednotlivých způsobů (částí) ověřování. Žák prospěl, jestliže získal alespoň 40 bodů z průběžného a 40 bodů ze sumativního hodnocení.

Přepočet váženého průměru na známky:

85 – 100	1
70 – 84	2
55 – 69	3
40 – 54	4
0 – 39	5

3. Doporučená studijní literatura, odkazy na ilustrační zdroje:

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika-příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Učebnice pro střední školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-719-6099-3.

Jaroslav Reichl – matematika. Online. 2007. Dostupné z:
<http://www.jreichl.com/matematika/matematika.htm>. [cit. 2025-03-09].

Pavlicová, Vladimíra, *Webová aplikace: Funkce – Portál středoškolské matematiky*, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky, Online. 2007. Dostupné z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/funkce/>, [cit. 2025-03-30].

Krynický, Martin, *Realisticky.cz když (se) chcete naučit*, Online, Dostupné z:
<http://www.realisticky.cz/index.php>

Portál GeoGebra, Online, Dostupné z: <https://www.geogebra.org/download>

4. Poznámky